UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

12/1

1999

MATHEMATICS

Paper 1

Time : 3 Hours] *[Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.

Answer any five questions.

All questions carry equal marks.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

1\. (a) Find the coordinates of the vectors

$V_1 = (1, 2, 1)$ and $V_2 = (1, 0, -1)$

relative to the basis $Z_1 = (1, 1, 0)$, $Z_2 = (1, 0, 1)$, $Z_3 = (1, 1, 1)$.

(b) Let T be the linear operator on C^3 for which

$T(1, 0, 0) = (1, 0, i)$; $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$; $T(0, 0, 1) = (i, 1, 0)$.

Show that T is not invertible.

(c) Given $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, use the fact that A satisfies its characteristic equation to compute A^2 and also since A is non-singular, compute A^{-2}.

2\. (a) Define Rank of a Matrix and find the rank of

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, find non-singular matrices P and Q such that PAQ is in the normal form.

(c) Show that the characteristic values of a diagonal matrix are precisely the elements in the diagonal. Hence, show that if a matrix B is similar to a diagonal matrix D, then the diagonal elements of D are the characteristic values of B.

www.upscportal.com

Downloaded from: http://www.upscportal.com

1\. (ಎ) $Z_1 = (1, 1, 0)$, $Z_2 = (1, 0, 1)$, $Z_3 = (1, 1, 1)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, $V_1 = (1, 2, 1)$ ಮತ್ತು $V_2 = (1, 0, -1)$ ಸದಿಶಗಳ ಸ್ಥಾನನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) T ಎಂಬುದು C^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ನಿರ್ವಾಹಕ (linear operator) ಆಗಿರಲಿ. ಇದಕ್ಕೆ
$T(1, 0, 0) = (1, 0, i)$; $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$; $T(0, 0, 1) = (i, 1, 0)$.
T ವಿಲೋಮವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಸಿ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, A^2 ನ್ನು ಗಣನೆಮಾಡಲು A ತನ್ನ ವಿಲಕ್ಷಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಳಸಿ, ಹಾಗೂ A ಅನ್ಯಾದೃಶವಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ A^{-2} ನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ.

2\. (ಎ) ಕ್ರಮಚೌಕದ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ, ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನದರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(ಬಿ) ಕ್ರಮಚೌಕ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ಗೆ PAQ ಸಾಧಾರಣ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅನ್ಯದೃಶವಲ್ಲದ P ಮತ್ತು Q ಕ್ರಮಚೌಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾ ಕ್ರಮಚೌಕದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಕರ್ಣರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಾಂಶಗಳೇ ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ರಮಚೌಕ B ಯು ಕರ್ಣರೇಖಾ ಕ್ರಮಚೌಕ D - ಯಂತೆಯೇ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ D ಯ ಕರ್ಣರೇಖಾ ಮೂಲಾಂಶಗಳು B ಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

/Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

3. (a) If A is an orthogonal matrix, show that A′ and A^{-1} are also orthogonal.

(b) Determine the characteristic roots and the associated characteristic vectors for the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Reduce the quadratic form $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ to the canonical form. Also, specify the matrix of transformation.

4. (a) Find the slope for the given parametric equations of a curve $x = 2t$ and $y = \frac{16}{t}$ at the point $t = 4$.

(b) Trace the curve $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2$.

(c) Show that the diameter of the right circular cylinder of greatest curved surface which can be inscribed in a given cone is equal to the radius of the cone.

5. (a) Find the volume cut from the paraboloid $x^2 + 4y^2 = 2$, by the plane $z = 1$.

(b) Find the value of $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

(c) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^{5/3}\theta \cos^{4/3}\theta \, d\theta$.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

3. (ಎ) A ಒಂದು ಸಮಕೋನೀಯ ಕ್ರಮಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, A′ ಮತ್ತು A^{-1} ಇವೂ ಸಹ ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಚೌಕದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಂಬಂಧಿತ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(ಸಿ) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ ಈ ವರ್ಗನಮೂನೆಯನ್ನು ಪ್ರಮಾಣ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ (canonical form) ಇಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಕ್ರಮಚೌಕವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿ.

4. (ಎ) t = 4 ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, $x = 2t$ ಮತ್ತು $y = \frac{16}{t}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಪ್ರಸಕ್ತ ನಿಯತಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪ್ರಣವತೆ (slope) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2$ ಇದರ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ಒಳರೇಖಿಸಬಹುದಾದ, ಅತಿಹೆಚ್ಚಿನ ಬಾಗು ಮೇಲ್ಮೈಯುಳ್ಳ ಲಂಬ ವರ್ತುಲ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವ್ಯಾಸವು, ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

5. (ಎ) z = 1 ಪಾತಳಿಯಿಂದ ವಿಚ್ಛೇದಿಸಲಾದ $x^2 + 4y^2 = 2$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದ್ದರ ಘನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) $\int_0^{\pi/2} \sin^{5/3}\theta \cos^{4/3}\theta \, d\theta$ ಇದರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಿ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

6. (a) Find the equation of the circle inscribed in the triangle determined by the lines $2x - 3y + 21 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$ and $2x + 3y + 9 = 0$.

(b) Show that the pair of straight lines joining the origin to the points of intersection of the line $y = mx + c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2$ are at right angles, if $2c^2 = a^2(1 + m^2)$.

(c) If e and e' are eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show that $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

7. (a) Find the equation to the sphere which passes through the points $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$, $(1, -3, 0)$ and whose centre lies on the plane $x + y + z = 0$.

(b) Find the condition for the spheres

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \text{ and}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

to cut each other orthogonally.

(c) Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $3x + y - 5z + 7 = 0$ and $x - 2y + 4z - 3 = 0$ and through the point $(3, 2, -4)$.

8. (a) Solve :

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^6.$$

(b) Solve :

$$(1 + xy)\,y\,dx + (1 - xy)\,x\,dy = 0.$$

(c) The number N of bacteria in a culture grew at a rate proportional to N. The value of N was initially 100 and increased to 332 in one hour. What would be the value of N after $1\frac{1}{2}$ hours ?

9. (a) Solve :

$$(1 + x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + x)\frac{dy}{dx} + y = 2\sin(\log(1 + x)).$$

(b) Solve :

$$y'' + 4y' + 4y = \sin t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

(c) Solve :

$$(2x + 3)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (2x + 3)\frac{dy}{dx} - 12y = 6x.$$

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

6. (ಎ) $2x - 3y + 21 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 3y + 9 = 0$ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಳರೇಖಿತವಾದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $2c^2 = a^2(1 + m^2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $y = mx + c$ ರೇಖೆಯನ್ನು ವಿಚ್ಛೇದಿಸುವ ಹಾಗೂ $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ವಿಚ್ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಮೂಲವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಸಿ) e ಮತ್ತು e' ಗಳು ಒಂದು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುವರ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರೀಯತೆ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

7. (ಎ) $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$, $(1, -3, 0)$ ಹಾಗೂ $x + y + z = 0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಕೇಂದ್ರ ರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$ ಈ ಗೋಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಿದ್ದರೆ ಯಾವ ಉಪಾಧಿ ಅಗತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) $3x + y - 5z + 7 = 0$ ಹಾಗೂ $x - 2y + 4z - 3 = 0$ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ವಿಚ್ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಹಾಗೂ $(3, 2, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. (ಎ) $x \frac{dy}{dx} + y = x^3 y^6$ ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $(1 + xy)\, y\, dx + (1 - xy)\, x\, dy = 0$ ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಸಂವರ್ಧನದಲ್ಲಿರುವ (culture) N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳು N ಗೆ ಅನುಪಾತ ದರದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತವೆ. N ಮೌಲ್ಯವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 100 ಇದ್ದಿತು; ಒಂದು ಗಂಟೆಯ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅದು 332 ಕ್ಕೆ ಏರಿತು. $1\frac{1}{2}$ ಗಂಟೆಯ ನಂತರ N ಮೌಲ್ಯ ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು ?

9. (ಎ) ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$(1 + x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1 + x) \frac{dy}{dx} + y = 2 \sin(\log(1 + x)).$$

(ಬಿ) ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$y'' + 4y' + 4y = \sin t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

(ಸಿ) ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $(2x + 3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (2x + 3) \frac{dy}{dx} - 12y = 6x.$

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

10. (a) Show that the volume of the tetrahedron ABCD is $\frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$. Hence, find the volume of the tetrahedron formed by the points (1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 2) and (3, 3, 4).

(b) Verify Divergence Theorem for

$$\vec{F} = (x^2 - yz)\,\vec{i} + (y^2 - zx)\,\vec{j} + (z^2 - xy)\,\vec{k}$$

taken over the rectangular parallelopiped $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

(c) Prove that $\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\log \sqrt{g})$.

11. (a) A rod AB of length a has its centre of gravity at G where $\frac{AG}{BG} = \frac{m}{n}$ (> 1). The rod hangs from a smooth peg C by a light string of length l which is attached to the ends of the rod and passes over the peg. Show that if $l > \left(\frac{m+n}{m-n}\right)a$, there is a position of equilibrium which is not vertical.

(b) A body of weight W is placed on a rough plane whose inclination to the horizontal is α. If $\alpha > \lambda$ where λ is the angle of friction, find the least force which will prevent the body from sliding down the plane.

(c) The position of a particle moving in a straight line is given by $x = a \cos nt + b \sin nt$. Prove that it executes simple harmonic motion of period $\frac{2\pi}{n}$ and amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$.

12. (a) A particle is hanging from a fixed point by a light cord 3 feet long and is started with an initial horizontal speed such that the cord slackens when the particle is 5 feet above the lowest point. Find upto how much height it will rise.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

10. (ಎ) ABCD ಚತುರ್ಮುಖಿಯ ಘನಗಾತ್ರವು $\frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ (1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 2) ಹಾಗೂ (3, 3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರೂಪುಗೊಂಡ ಚತುರ್ಮುಖಿಯ ಘನಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ಯಾರಲಲೋಪೈಪೆಡ್ $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ ಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ $\vec{F} = (x^2 - yz)\vec{i} + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ ಗೆ ಅಪಸರಣ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(ಸಿ) $\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\log \sqrt{g})$ ಇದನ್ನು ಸಾಬೀತು ಮಾಡಿ.

11. (ಎ) AB ಎಂಬ ಸರಳಿನ ಉದ್ದ a ಆಗಿದ್ದು ಅದು G ಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅಲ್ಲಿ $\frac{AG}{BG} = \frac{m}{n}\ (> 1)$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸರಳು C ಎಂಬ ಸಪಾಟಾದ ಗೂಟದಿಂದ l ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಹಗುರ ದಾರದಿಂದ ತೂಗಹಾಕಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ದಾರವನ್ನು ಸರಳಿನ ತುದಿಗಳಿಗೆ ಕಟ್ಟಿದ್ದು ಅದು ಗೂಟದ ಮೇಲೆ ಹಾದು ಬರುತ್ತದೆ. $l > \left(\frac{m+n}{m-n}\right) a$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ನೇರವಾಗಿಲ್ಲದಂತಹ ಸಮತೋಲನ ಸ್ಥಿತಿ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) W ತೂಕವಿರುವ ವಸ್ತುವನ್ನು ಒಂದು ಒರಟು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಇರಿಸಿದೆ. ಸಮಾಂತರಕ್ಕೆ ಈ ಸಮತಲದ ಓಲುವಿಕೆಯು α ಆಗಿದೆ. $\alpha > \lambda$, ಆಗಿದ್ದು λ ಎಂಬುದು ಘರ್ಷಣೆಯ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ವಸ್ತುವು ಸಮತಲದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಜಾರದಂತೆ ತಡೆಹಿಡಿಯಲು ಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಬಲವೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಕಣವೊಂದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು $x = a \cos nt + b \sin nt$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು $\frac{2\pi}{n}$ ರಷ್ಟು ಸರಳ ಸಾಮರಸ್ಯ ಚಲನೆಯ ಅವಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ರಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು (Amplitude) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

12. (ಎ) ಒಂದು ವಸ್ತುವು 3 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಹಗುರವಾದ ಹುರಿಯಿಂದ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೂಗುಬಿದ್ದಿದೆ. ವಸ್ತುವು ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಅಡಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಹುರಿಯು ಸಡಿಲಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಸಮಾಂತರ ವೇಗದಿಂದ ಅದನ್ನು ಚಾಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಹೋಗಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(b) A hemispherical bowl is filled with water and immersed and placed with its plane base in contact with a horizontal table. Show that the resultant vertical thrust on its surface is one-third of the thrust on the table.

(c) Let W_1 and W_2 be the weights of a body in vacuum and water respectively. Prove that the weight of the body in air of specific gravity s will be $W_1 - s(W_1 - W_2)$.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಬಿ) ನೀರು ತುಂಬಿದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಬೋಗುಣಿಯನ್ನು ಅದರ ಸಮತಲ ತಳವು ಸಮಾಂತರ ಮೇಜಿನ ಸಂಪರ್ಕಕ್ಕೆ ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಲಂಬ ನೂಕು ಒತ್ತಡವು (thrust) ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿನ ನೂಕು ಒತ್ತಡದ $\frac{1}{3}$ ರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಸಿ) ಶೂನ್ಯ ಹಾಗೂ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ತೂಕವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ W_1 ಮತ್ತು W_2 ಎಂದಿರಲಿ. s ಎಂಬ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುರುತ್ವವಿರುವ ವಾಯುವಿನಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ತೂಕವು $W_1 - s(W_1 - W_2)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

12/2

1999

MATHEMATICS

Paper 2

Time : 3 Hours] *[Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.

Answer any ***five*** *questions choosing at least* ***two*** *from each Section.*

All questions carry equal marks.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

SECTION A

1. (a) Prove that a finite semi-group satisfying cancellation laws is a group.

   (b) Find an isomorphism between a finite group G and a permutation group.

   (c) Show that a normal sub-group N of G is maximal if and only if the quotient group G / N is simple.

2. (a) Prove that the characteristic of a finite field is prime.

   (b) Show that for any two ideals A and B of a ring R, $A \cup B$ is an ideal of R if and only if either $A \subseteq B$ or $B \subseteq A$.

   (c) Show that in a Unique Factorisation Domain (UFD) every irreducible element is prime.

3. (a) Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0, \quad A \in R \end{cases}$$

   (b) Prove that in a Euclidean space R, every Cauchy sequence is convergent.

   (c) Find the area of the positive quadrant bounded by the circle $x^2 + y^2 = 16$ and the straight line $y = x$.

4. (a) Define the improper integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$, $a > 0$ where f is a bounded function on the interval concerned. Show that $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ is convergent.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

ವಿಭಾಗ A

1. (ಎ) ಕ್ಯಾನ್ಸಲೇಷನ್ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಅರೆಸಮೂಹವು ಒಂದು ಸಮೂಹ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   (ಬಿ) ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಸಮೂಹ G ಹಾಗೂ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನ ಗುಂಪಿನ ನಡುವೆಯ ಒಂದು ಸಮಾನಾಕೃತಿತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ಸಿ) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಗುಂಪು G / N ಸರಳವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ G ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉಪಸಮೂಹ N ಮ್ಯಾಕ್ಸಿಮಲ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

2. (ಎ) ಅವಿಭಾಜ್ಯತೆಯು ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   (ಬಿ) ಒಂದು ವರ್ತುಲ R ನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆದರ್ಶಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗೆ, $A \subseteq B$ ಅಥವಾ $B \subseteq A$ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $A \cup B$ ಯು Rನ ಆದರ್ಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

   (ಸಿ) ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಪವರ್ತನೀಯ ವಲಯದಲ್ಲಿ (UFD) ತಗ್ಗಿಸಲಾಗದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

3. (ಎ) ಕೆಳಕಂಡ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0, \quad A \in R \end{cases}$$

   (ಬಿ) ಒಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ಅವಕಾಶ R ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಿ ಸರಣಿಯೂ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   (ಸಿ) $x^2 + y^2 = 18$ ವೃತ್ತದಿಂದ ಹಾಗೂ $y = x$ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಧನಾತ್ಮಕ ಕ್ವಾಡ್ರಂಟ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. (ಎ) ಅಸಮರ್ಪಕ ಅನುಕಲ $\int_a^\infty f(x)\, dx,\ a > 0$ ವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ f ಎನ್ನುವುದು ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅವಕಾಶದ ಬಂಧಿತ ಉತ್ಪನ್ನ. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(b) If $f \in \mathbf{R}[a, b]$ and if $m \leq f \leq M$, then prove that

(i) $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$

(ii) $|f| \in \mathbf{R}[a, b]$

(c) If (a, b) is a point of the domain of definition of a function $f(x, y)$ such that (i) $f_x(a, b)$ exists, and (ii) $f_y(x, y)$ is continuous at (a, b), then, prove that $f(x, y)$ is differentiable at (a, b).

5. (a) If $u = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$, then prove that u satisfies the Laplace equation, and determine the corresponding analytic function $u + iv$.

(b) What is a Taylor series ? State the regions in which the Taylor expansion of the following functions are valid :

(i) $\log(1 - z)$

(ii) $\dfrac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$

(c) If $f(z)$ is an analytic function, prove that

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4\,|f'(z)|^2$$

6. (a) Classify the points $z = 0, 1$ and ∞ in relation to the function $f(z) = \left(\dfrac{z - 2}{z^2}\right) \sin\left(\dfrac{1}{1 - z}\right)$

(b) Define residue. If a function $f(z)$ is analytic in the extended plane except at a finite number of singularities including $z = \infty$, then show that the sum of the residues of $f(z)$ is zero.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಬಿ) $f \in \mathbf{R}[a, b]$ ಹಾಗೂ $m \le f \le M$, ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ :

(i) $m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a)$

(ii) $|f| \in \mathbf{R}[a, b]$

(ಸಿ) (a, b,) ಎನ್ನುವುದು f(x, y) ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ವಲಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು (i) $f_x(a, b)$ ಇರುವಂತಿದ್ದರೆ (ii) $f_y(x, y)$ ಇದು (a, b) ಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ f(x, y) ಇದು (a, b) ಯಲ್ಲಿ ಅವಕಲನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

5. (ಎ) $u = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, u ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಉತ್ಪನ್ನ u + iv ಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಟೈಲರ್ ಸರಣಿ ಎಂದರೇನು ? ಯಾವ ವಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಟೈಲರ್‌ನ ವಿಸ್ತರಣೆ ಸಿಂಧುವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ :

(i) $\log(1 - z)$

(ii) $\dfrac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$

(ಸಿ) f(z) ಎನ್ನುವುದು ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4\,|f'(z)|^2$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

6. (ಎ) $f(z) = \left(\dfrac{z - 2}{z^2}\right) \sin\left(\dfrac{1}{1 - z}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ z = 0, 1 ಮತ್ತು ∞ ಅಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಶೇಷ ಎಂದರೇನು ? ವಿವರಿಸಿ. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ f(z) ಎಂಬುದು z = ∞ ಸೇರಿದಂತೆ ಏಕಮಾತ್ರತೆಗಳ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ವಿಸ್ತ್ರೃತ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಕವಾಗಿದ್ದಾಗ f(z) ನ ಶೇಷಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(c) Prove that $\int_0^\infty e^{-x^2 \cos^2 \alpha} \cos (x^2 \sin 2\alpha)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \alpha$

7. (a) Obtain the partial differential equation of all spheres of radius c having their centres on the xy-plane.

(b) Solve the equation

$(y + z) p - (z + x) q = x - y$

(c) Find the complete integral of $pq + xp + yq = 0$, using Charpit's method.

8. (a) Define a complete integral of a partial differential equation. Show that $z = 1$ is the singular integral of $z^2 (1 + p^2 + q^2) = 1$.

(b) Solve : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \cos x \cos 2y$

(c) Solve :

(i) $p^2 + q^2 = 1$

(ii) $pz = 1 + q^2$

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಸಿ) $\int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos^2 \alpha} \cos (x^2 \sin 2\alpha)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \alpha$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

7. (ಎ) xy ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯ c ಹೊಂದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಗೋಳಗಳ ಆಂಶಿಕ ಅವಕಲನೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$(y + z)\, p - (z + x)\, q = x - y$

(ಸಿ) ಚಾರ್‌ಪಿಟ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ $pq + xp + yq = 0$ ಇದರ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅನುಕಲವನ್ನು (integral) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. (ಎ) ಆಂಶಿಕ ಅವಕಲನೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅನುಕಲವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. $z^2 (1 + p^2 + q^2) = 1$ ಇದರ ಏಕಮಾತ್ರ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ $z = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \cos x \cos 2y.$$

(ಸಿ) ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $p^2 + q^2 = 1$

(ii) $pz = 1 + q^2$

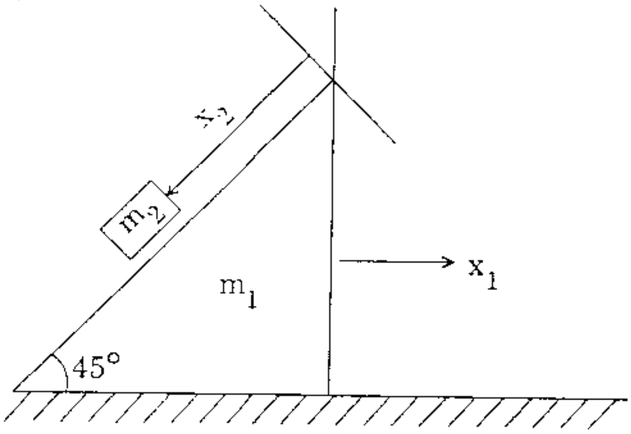
[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

SECTION B

9. (a) A block of mass m_2 can slide on another block of mass m_1, which in turn slides on a horizontal surface as shown in the figure. Using x_1 and x_2 as coordinates, obtain Lagrange's equations of motion.



(b) A circular cylinder of radius 3 cm and weight W whose centre of gravity, G, is at a distance 1 cm from the axis, rolls on a horizontal plane. If motion be just started from the position of unstable equilibrium, show that the normal reaction of the plane when G is in its lowest position is $\frac{W(2+K^2)}{(1+K^2)}$, where 2K is the radius of gyration about an axis passing through G.

(c) (i) Give an example for a system with 3 degrees of freedom.

(ii) Give an example for a system with 2 generalised coordinates.

10. (a) Derive Lagrange's equations of motion for a non-holonomic system in the form

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

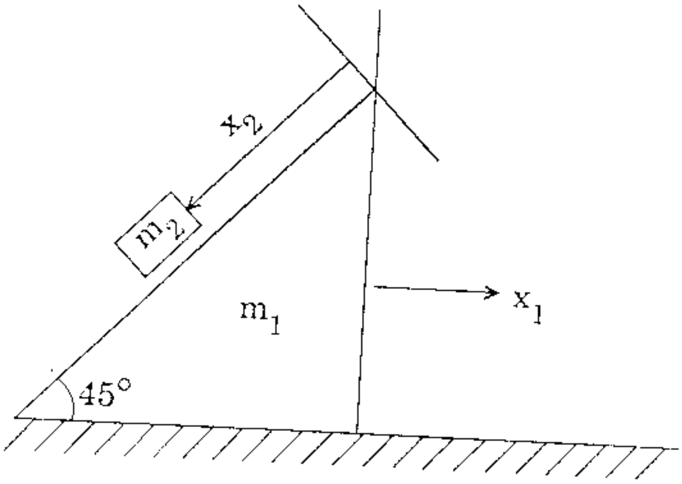
with usual notations.

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

ವಿಭಾಗ B

9. (ಎ) m_2 ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಘಟ್ಟಿಯೊಂದು m_1 ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಘಟ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ಜಾರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ m_1 ಘಟ್ಟಿಯೂ ಸಹ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ನಯವಾದ ಮೇಲ್ಮೈ ಮೇಲೆ ಜಾರುತ್ತದೆ. x_1 ಮತ್ತು x_2 ಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಲಾಗ್ರಾಂಜ್ ನ ಚಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(ಬಿ) 3 ಸೆಂಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ತೂಕ W ಮತ್ತು G ಯಲ್ಲಿ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಲಾಕಾರದ ಉರುಳೆಯು ಅಕ್ಷದಿಂದ 1 ಸೆಂಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದು ಸಮಾಂತರ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಉರುಳುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅಸ್ಥಿರ ಸಮಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಆಗಷ್ಟೇ ಚಲನೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದರೆ G ಯು ಅದರ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಸಮತಲದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯು $\frac{W(2+K^2)}{(1+K^2)}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ 2K ಎಂಬುದು G ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಗೈರೇಷನ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

(ಸಿ) (i) 3 ಡಿಗ್ರೀಗಳ ಮುಕ್ತತೆ ಇರುವ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

(ii) 2 ಸಾಧಾರಣೀಕೃತ ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿರುವ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

10. (ಎ) $\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}, \; i = 1, 2, \ldots, n$

ರೂಪದ ಒಂದು ನಾನ್–ಹಾಲೋನಿಕ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಜ್ಞೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜ್ ನ ಚಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(b) Three equal uniform rods AB, BC and CD are smoothly joined at B and C, and the ends A and D are fastened to smooth fixed points whose distance apart is equal to the length of the rod. The frame at rest is in the form of a square. A blow J is given perpendicular to AB at its middle point and in the plane of the square. Show that the energy set up is $\frac{3J^2}{40m}$, where m is the mass of each rod. Find also the blows at the joints B and C.

11. (a) Discuss Bernoulli's equation in Hydrodynamics.

(b) Discuss the potential function corresponding to the stream function $\Phi = Ar^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$ satisfying the Laplace equation. Sketch the flow nets for $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

12. (a) Derive the general form of the equation of motion of an inviscid fluid.

(b) Prove that the stream lines are straight if the speed is the same everywhere.

13. (a) What is the convergence criteria for Newton-Raphson's method ? Find an iteration formula for the reciprocal of a given number N and hence express $\frac{1}{3}$ in decimal notation without using division.

(b) Find the root of $x^4 - x - 10 = 0$ between 1 and 2 by both bisection and secant methods. Which one converges faster ? Why ?

(c) Using modified Euler's method, find an approximate value of y when x = 0·3, given that $\frac{dy}{dx} = x + y$ and y = 1 when x = 0.

14. (a) Find the interpolating polynomial for the following data :

x :	— 2	0	3	4	5	10
y :	4	0	9	16	5	100

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಬಿ) ಸಮವಾದ ಏಕರೂಪದ AB, BC ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಮೂರು ಸರಳುಗಳನ್ನು B ಮತ್ತು C ಎಂಬಲ್ಲಿ ನಯವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು A ಹಾಗೂ D ತುದಿಗಳನ್ನು ಸಪಾಟಾದ ನಿಶ್ಚಿತ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಸರಳಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ವಿಶ್ರಾಂತ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಚೌಕಟ್ಟು ಒಂದು ಚಚೌಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಅದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಹಾಗೂ ಚಚೌಕದ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ J ಎಂಬ ಪ್ರಹಾರವನ್ನು (Blow) ಕೊಡಲಾಗುವುದು. ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ ಚೈತನ್ಯವು $\frac{3J^2}{40m}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯಾಗಿದೆ. B ಮತ್ತು C ಜಾಯಿಂಟುಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಹಾರಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. (ಎ) ಹೈಡ್ರೊಡೈನಮಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಬೆರ್ನೋಲಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿ.

(ಬಿ) ಲ್ಯಾಪ್ಲೇಸ್ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ $\Phi = Ar^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$ ಎಂಬ ಸ್ಟ್ರೀಮ್ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಅಂತಸ್ಥ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (potential function) ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿ. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ಗೆ ಫ್ಲೋ ನೆಟ್‌ಗಳ ಚಿತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ.

12. (ಎ) ಒಂದು ಇನ್‌ವಿಸಿಡ್ ದ್ರವದ ಚಲನೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ವೇಗವು ಎಲ್ಲ ಕಡೆಯೂ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇದ್ದಾಗ ಹರಿವು ರೇಖೆಗಳು (stream lines) ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

13. (ಎ) ನ್ಯೂಟನ್–ರ್‍ಯಾಫ್ಸನ್ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಕತೆಯ ಅಳತೆಗೋಲು ಯಾವುದು ? ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ N ನ ಪ್ರತಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪುನರ್‌ಪ್ರತಿಪಾದನ ಸೂತ್ರ (Iteration formula) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆ $\frac{1}{3}$ ಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಸಂಜ್ಞೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ಬಿ) 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ $x^4 - x - 10 = 0$ ಗೆ ಸಮಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಸಿಕಂಟ್ ರೇಖಾವಿಧಾನಗಳೆರಡನ್ನೂ ಬಳಸಿ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದು ವೇಗನೇ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾಕೆ ?

(ಸಿ) ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಯೂಲರ್‌ನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ y ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $x = 0{\cdot}3$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು; $x = 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $\frac{dy}{dx} = x + y$ ಮತ್ತು $y = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

14. (ಎ) ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವಾಗುವ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

x :	—2	0	3	4	5	10
y :	4	0	9	16	5	100

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(b) Apply Runge-Kutta fourth order method, to find an approximate value of y(0·2) and y(0·4) from $10\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, taking $h = 0{\cdot}1$.

(c) What is the advantage of using Stirling's central difference formula over Gauss forward or backward central difference formulae during interpolation ? Interpolate the value of y at x = — 1 from the following

x :	1	3	5	— 2	2
y :	1	8	24	3·5	4

by any of the forward and backward interpolation formulae.

15. (a) (i) Show that if P(A) = P(B) = P(C) = 1, then $P(A \cap B \cap C) = 1$.

(ii) If the joint density function of two random variables X and Y is

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{3}, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

find the conditional mean of X given $Y = \frac{1}{2}$.

(b) Show that χ^2 distribution tends to normal distribution for large degrees of freedom.

16. (a) Solve the following LPP by both graphical and simplex methods. Compare the results.

Maximize $z = 2x_1 + 3x_2$,

subjected to the conditions

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಬಿ) $h = 0{\cdot}1$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು $10\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ ಎಂಬುದರಿಂದ $y(0{\cdot}2)$ ಮತ್ತು $y(0{\cdot}4)$ ಎಂಬುದರ ಸರಿಸುಮಾರು ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ರಂಗ್–ಕುಟ್ಟಾ ನಾಲ್ಕನೇ ಆಯಾಮದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ.

(ಸಿ) ಪ್ರಕ್ಷೇಪನದ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಗಾಸ್‌ನ ಮುನ್ನಡೆ ಅಥವಾ ಹಿನ್ನಡೆ ಕೇಂದ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ಟರ್ಲಿಂಗ್‌ನ ಕೇಂದ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಲ್ಲಿನ ಅನುಕೂಲತೆ ಏನು ? ಕೆಳಕಂಡದ್ದರಿಂದ $x = -1$ ನಲ್ಲಿ y ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಮುನ್ನಡೆ ಅಥವಾ ಹಿನ್ನಡೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಮೂಲಕ ಪ್ರಕ್ಷೇಪನ ಮಾಡಿ :

x :	1	3	5	—2	2
y :	1	8	24	3·5	4

15. (ಎ) (i) $P(A) = P(B) = P(C) = 1$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $P(A \cap B \cap C) = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ii) X ಮತ್ತು Y ಎಂಬ ಎರಡು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರಗಳ ಕೂಡು ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಉತ್ಪನ್ನವು

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{3}, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{ಆಗಿದ್ದಾಗ ಅಥವಾ} \end{cases}$$

$Y = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, X ನ ಉಪಾಧಿಕ ಮಾಧ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಅಧಿಕ ಮುಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ χ^2 ವಿತರಣೆಯು ಸಾಧಾರಣ ವಿತರಣೆಯತ್ತ ಪ್ರವೃತ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

16. (ಎ) ಕೆಳಕಂಡ LPP ಗೆ ಗ್ರಾಫಿಕಲ್ ಹಾಗೂ ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನಗಳೆರಡರಿಂದಲೂ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ. ಕೆಳಕಂಡ ಉಪಾಧಿಗಳಿಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿ $z = 2x_1 + 3x_2$ ಗೆ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ :

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

[Turn over

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(b) Solve the following transportation problem.

		To			
		1	2	3	Supply
	1	2	7	4	5
	2	3	3	1	8
From	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
	Demand	7	9	18	34

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

(ಬಿ) ಕೆಳಕಂಡ ಸಾಗಾಣಿಕೆ ಸಮಸ್ಯೆ (Transportation Problem) ಗೆ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

		ಗೆ			
		1	2	3	ಸರಬರಾಜು
	1	2	7	4	5
ಇಂದ	2	3	3	1	8
	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
ಬೇಡಿಕೆ		7	9	18	34

www.upscportal.com

UPSC PORTAL
Downloaded from: http://www.upscportal.com

www.upscportal.com